学校________ 班级________ 姓名________ 准考证号________ 考场号________ 座位号________

密 封 线 内 不 要 答 题

2023学年第一学期高一年级10月四校联考

数学学科　试题卷

考生须知：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟；
2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场、座位号及准考证号（填涂）；
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1．设全集$U=\{2,3,m^2+m-4\}$，集合$A=\{m,2\}$，$\complement_U A=\{3\}$，则$m=$（ ▲ ）

A．±2　　B．2　　C．-2　　D．-4

2．命题“$\forall x>0,x^2-x\le1$”的否定是（ ▲ ）

A．$\forall x\le0,x^2-x\le1$　　B．$\forall x>0,x^2-x>1$

C．$\exists x\le0,x^2-x\le1$　　D．$\exists x>0,x^2-x>1$

3．已知a，b，c，满足$c<b<a$，且$ac<0$，那么下列不等式中一定成立的是（ ▲ ）

A．$ab>ac$　　B．$c(b-a)<0$

C．$cb^2<ab^2$　　D．$ac(a-c)>0$

4．若正数x，y满足$x+3y=5xy$，则$3x+4y$的最小值是（ ▲ ）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

5．命题$p:\exists x\in\{x|1\le x\le9\}$，$x^2-ax+36\le0$，若$p$是真命题，则实数$a$的取值范围为（ ▲ ）

A．$a\ge37$　　B．$a\ge13$　　C．$a\ge12$　　D．$a\le13$

6．函数$y=[x]$在数学上称为高斯函数，也叫取整函数，其中$[x]$表示不大于x的最大整数，如$[1.5]=1,[-2.3]=-3,[3]=3$．那么不等式$4[x]^2-12[x]+5\le0$成立的充分不必要条件是（ ▲ ）

A．$[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$　　B．$[1,2]$　　C．$[1,3)$　　D．$[1,3]$

7．设集合$A=\{m,-1,2\}$，其中m为实数．令$B=\{a^3|a\in A\}$，$C=A\cup B$．若C的所有元素和为9，则C的所有元素之积为（ ▲ ）

A．0　　B．2　　C．4　　D．0或4

慧博高中数学最新试题 头条 @月亮之光H

8．正数 a,b 满足 $9a+b=ab$，若不等式 $a+b\geq -x^2+2x+18-m$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 m 的取值范围是（ ▲ ）

A．$[3,+\infty)$　　B．$(-\infty,3]$　　C．$(-\infty,6]$　　D．$[6,+\infty)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．若不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集是 $(-1,2)$，则下列选项正确的是（ ▲ ）

A．$a+b+c=0$　　B．$a<0$

C．$b>0$ 且 $c<0$　　D．不等式 $ax^2+cx+b>0$ 的解集是 R

10．下列命题中为真命题的是（ ▲ ）

A．$\{0\}\in\{x|x^2-2x=0\}$

B．“$A\cup B=B$”的充要条件是 $A\cap B=A$

C．不等式 $x^2-7ax+12a^2<0\ (a\in \mathrm{R})$ 的解集为 $\{x|3a<x<4a\}$

D．若 $x>1$，$y>1$，且满足 $x+y=xy$，则 $\frac{2x}{x-1}+\frac{4y}{y-1}$ 的最小值为 $6+4\sqrt{2}$

11．已知函数 $y=x^2+ax+b$（$a>0$）有且只有一个零点，则（ ▲ ）

A．$a^2-b^2\leq 4$

B．$a^2+\frac{1}{b}\geq 4$

C．若不等式 $x^2+ax-b<0$ 的解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$（$x_1<x_2$），则 $x_1x_2>0$

D．若不等式 $x^2+ax+b<c$ 的解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$（$x_1<x_2$），且 $|x_1-x_2|=4$，则 $c=4$

12．设非空集合 $S=\{x|m\leq x\leq n\}$ 满足：当 $x\in S$ 时，有 $x^2\in S$. 给出如下命题，其中真命题是（ ▲ ）

A．若 $m=1$，则 $S=\{x|x\geq 1\}$　　B．若 $m=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{4}\leq n\leq 1$

C．若 $n=\frac{1}{2}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$　　D．若 $n=1$，则 $-1\leq m\leq 0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13．某人要买房，随着楼层的升高，上下楼耗费的精力增多，因此不满意度升高. 当住第 n 层楼时，上下楼造成的不满意度为 n. 但高处空气清新，嘈杂音较小，环境较为安静，因此随着楼层的升高，环境不满意度降低. 设住第 n 层楼时，环境不满意程度为 $\frac{9}{n}$. 则此人应选第______楼，会有一个最佳满意度.

慧博高中数学最新试题 头条 @月亮之光H

14．对于集合A,B,用card(A)表示有限集合A中元素的个数，已知card(A)=M,card(B)=N(M<N)，集合C满足A⊆C⊆B,则符合条件的集合C的个数是 ________.

15．已知集合$A=\{x|\frac{x-1}{x+1}<0\}$，$B=\{x|(x-b)^2<a\}$，若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件，则实数$b$的取值范围是______.

16．已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，则$\frac{1}{a+2b-3ab}$的最大值是______.

三、解答题：本题共6题，共70分

17（本题满分10分）．设全集$U=\mathrm{R}$，集合$A=\{x|1\le x\le 5\}$，集合$B=\{x|-1-2a\le x\le a-2\}$．

(1)若"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分不必要条件，求实数a的取值范围；

(2)若$B\subseteq A$，求实数a的取值范围．

18（本题满分12分）．已知命题$p:\forall x\in[-1,1],x^2+2x-k\le 0$，命题$q:\exists x\in\mathrm{R},x^2+2kx+3k+4=0$．

(1)当命题$\neg p$为假命题时，求实数k的取值范围；

(2)若命题p和q中有且仅有一个是假命题，求实数k的取值范围．

19（本题满分12分）．记不等式$ax+b>0$的解集为A，不等式$(ax-b)(x-a)\ge 0$的解集为B

(1)设$a\in R,b=-2a$，求A；

(2)若$A=(-\infty,1)$，求B

慧博高中数学最新试题 头条@月亮之光H

20（本题满分 12 分）．为宣传 2023 年杭州亚运会，某公益广告公司用一条长度为 1m 的铁丝，首尾相连做成一个直角三角形的海报纸，求：

(1)海报纸的斜边最短是多少？

(2)若在该海报纸画一个内切圆，则直角三角形内切圆半径r最大值是多少？

21（本题满分 12 分）．设函数$y=ax^2+x-b(a\in R,b\in R)$.

(1)若$b=1$，且集合$\{x|y=0\}$中有且只有一个元素，求实数a的取值集合；

(2)解关于x的不等式$y<(a-1)x^2+(b+2)x-2b$；

(3)当$a>0,b>1$时，记不等式$y>0$的解集为P，集合$Q=\{x|-2-t<x<-2+t\}$.若对于任意正数t,$P\cap Q\neq\emptyset$，求$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$的最大值.

22（本题满分 12 分）．已知二次函数$y=ax^2+bx+2(a,b$为实数)

(1)若$x=1$时，$y=1$且对$\forall x\in(2,5)$，$y>0$恒成立，求实数a的取值范围；

(2)若$x=1$时，$y=1$且对$\forall a\in[-2,-1]$，$y>0$恒成立，求实数x的取值范围；

(3)对$\forall x\in R$，$b>0$时，$y\geq 0$恒成立，求$\frac{a+2}{b}$的最小值.

密 封 线 内 不 要 答 题

慧博高中数学最新试题 头条 @月亮之光H

高一数学试卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求．

1．设全集$U=\left\{2,3,m^2+m-4\right\}$，集合$A=\{m,2\}$，$\complement_U A=\{3\}$，则$m=$（　）

A．± 2　　B．2　　C．-2　　D．-4

【答案】C

2．命题“$\forall x>0,x^2-x\le 1$”的否定是（　）

A．$\forall x\le 0,x^2-x\le 1$　　B．$\forall x>0,x^2-x>1$

C．$\exists x\le 0,x^2-x\le 1$　　D．$\exists x>0,x^2-x>1$

【答案】D

3．已知a，b，c，满足$c<b<a$，且$ac<0$，那么下列不等式中一定成立的是（　）

A．$ab>ac$　　B．$c(b-a)<0$

C．$cb^2<ab^2$　　D．$ac(a\text{-}c)>0$

【答案】A

4．若正数x，y满足$x+3y=5xy$，则$3x+4y$的最小值是（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【答案】D

5．命题$p:\exists x\in\{x\,|\,1\le x\le 9\}$，$x^2-ax+36\le 0$，若$p$是真命题，则实数$a$的取值范围为（　）

A．$a\ge 37$　　B．$a\ge 13$　　C．$a\ge 12$　　D．$a\le 13$

【答案】C

6．函数$y=[x]$在数学上称为高斯函数，也叫取整函数，其中$[x]$表示不大于x的最大整数，如$[1.5]=1,[-2.3]=-3,[3]=3$．那么不等式$4[x]^2-12[x]+5\le 0$成立的充分不必要条件是（　）

A．$[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$　　B．$[1,2]$　　C．$[1,3)$　　D．$[1,3]$

【答案】B

7．设集合$A=\left\{m,-1,2\right\}$，其中m为实数．令$B=\left\{a^3\middle|a\in A\right\}$，$C=A\cup B$．若$C$的所有元素和为$9$，则$C$的所有元素之积为（　）

A．0　　B．2　　C．4　　D．0 或 4

【答案】A

慧博高中数学最新试题 头条@月亮之光H

【详解】根据集合中元素的互异性，$m\neq -1$且$m\neq 2$.由题意，$B=\left\{a^3\middle|a\in A\right\}=\left\{m^3,-1,8\right\}$.

情况一：若$m^3=m$时

当$m=0$时，$A=\{0,-1,2\}$，$B=\{0,-1,8\}$，$C=A\cup B=\{0,-1,2,8\}$，

C的所有元素和为9，符合题意，此时C的所有元素之积为0；

当$m=1$时，$A=\{1,-1,2\}$，$B=\{1,-1,8\}$，$C=A\cup B=\{1,-1,2,8\}$，

C的所有元素和为10，不符题意；

情况二：若$m^3=2$时，此时$m=\sqrt[3]{2}$，$A=\left\{\sqrt[3]{2},-1,2\right\}$，$B=\{2,-1,8\}$，

但$C=A\cup B$此时含有唯一的无理数$\sqrt[3]{2}$，不可能元素之和为9；

情况三：若$m\neq\pm1$，$m\neq 2$，$m\neq\sqrt[3]{2}$且$m\neq 0$时，则A,B中只有唯一重复元素-1，

则$C=A\cup B=\left\{m,-1,2,m^3,8\right\}$，由题意$m-1+2+m^3+8=9$，即$m^3+m=0=m(m^2+1)$，

此时$m=0$，矛盾.

综上所述，$m=0$时符合题意，此时C的所有元素之积为0.

故选：A

8．正数a,b满足$9a+b=ab$,若不等式$a+b\geq -x^2+2x+18-m$对任意实数x恒成立,则实数m的取值范围是

A．$[3,+\infty)$　　B．$(-\infty,3]$　　C．$(-\infty,6]$　　D．$[6,+\infty)$

8.【答案】A

【详解】$\because 9a+b=ab$,

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{9}{b}=1$，且$a,b$为正数,

$\therefore a+b=(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{9}{b})=10+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}..10+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=16$,

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$，即$a=4,\ \ b=12$时，$(a+b)_{min}=16$,

若不等式$a+b\geq -x^2+2x+18-m$对任意实数x恒成立,

则$16\geq -x^2+2x+18-m$对任意实数x恒成立,

即$m\geq -x^2+2x+2$对任意实数x恒成立,

$\because -x^2+2x+2=-(x-1)^2+3,,\ 3$,

$\therefore m\geq 3$,

故选：A

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．若不等式$ax^2-bx+c>0$的解集是$(-1,2)$，则下列选项正确的是（　　）

慧博高中数学最新试题 头条@月亮之光H

A．$a+b+c=0$　　　B．$a<0$

C．$b>0$且$c<0$　　　D．不等式$ax^2+cx+b>0$的解集是R

【答案】AB

【解析】由于不等式$ax^2-bx+c>0$的解集是$(-1,2)$，所以$a<0$，B选项正确，

且$\begin{cases}-1+2=\dfrac{b}{a}\\-1\times 2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，即$\begin{cases}1=\dfrac{b}{a}\\-2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，则$b=a,c=-2a$，

所以$a+b+c=a+a-2a=0$，A选项正确，

$b=a<0,c=-2a>0$，C选项错误，

不等式$ax^2+cx+b>0$，即$ax^2-2ax+a>0$，

即$x^2-2x+1=(x-1)^2<0$，无解，D选项错误.故选：AB

10．下列命题中为真命题的是（　）

A．$\{0\}\in\{x|x^2-2x=0\}$

B．“$A\cup B=B$”的充要条件是$A\cap B=A$

C．不等式$x^2-7ax+12a^2<0(a\in\mathrm{R})$的解集为$\{x|3a<x<4a\}$

D．若$x>1$，$y>1$，且满足$x+y=xy$，则$\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{4y}{y-1}$的最小值为$6+4\sqrt{2}$

【答案】BD

11．已知函数$y=x^2+ax+b$（$a>0$）有且只有一个零点，则（　）

A．$a^2-b^2\le 4$

B．$a^2+\dfrac{1}{b}\ge 4$

C．若不等式$x^2+ax-b<0$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$（$x_1<x_2$），则$x_1x_2>0$

D．若不等式$x^2+ax+b<c$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$（$x_1<x_2$），且$|x_1-x_2|=4$，则$c=4$

【答案】ABD

【解析】因为$y=x^2+ax+b$（$a>0$）有且只有一个零点，故可得$\Delta=a^2-4b=0$，即$a^2=4b>0$，

再利用基本不等式和不等式的性质对四个选项逐一分析即可得到答案.

【详解】因为$y=x^2+ax+b$（$a>0$）有且只有一个零点，

故可得$\Delta=a^2-4b=0$，即$a^2=4b>0$，

对A：$a^2-b^2\le 4$等价于$b^2-4b+4\ge 0$，显然$(b-2)^2\ge 0$，故A正确；

慧博高中数学最新试题　头条@月亮之光H

对 B：$a^2+\frac{1}{b}=4b+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{4b\times\frac{1}{b}}=4$，故 B 正确；

对 C：因为不等式 $x^2+ax-b<0$ 的解集为 (x_1,x_2)，

故可得 $x_1x_2=-b<0$，故 C 错误；

对 D：因为不等式 $x^2+ax+b<c$ 的解集为 (x_1,x_2)，且 $|x_1-x_2|=4$，

则方程 $x^2+ax+b-c=0$ 的两根为 x_1，x_2，

故可得 $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2-4(b-c)}=\sqrt{4c}=2\sqrt{c}=4$，

故可得 $c=4$，故 D 正确.

故选：ABD.

12．设非空集合 $S=\{x|m\leq x\leq n\}$ 满足：当 $x\in S$ 时，有 $x^2\in S$.给出如下命题，其中真命题是（　）

A. 若 $m=1$，则 $S=\{x|x\geq 1\}$　　　　B. 若 $m=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{4}\leq n\leq 1$

C. 若 $n=\frac{1}{2}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$　　　　D. 若 $n=1$，则 $-1\leq m\leq 0$

【答案】BC

【解析】【分析】

本题考查了集合的新定义问题.

先由非空集合 $S=\{x|m\leq x\leq n\}$ 满足：当 $x\in S$ 时，有 $x^2\in S$，判断出 $m\geq 1$ 或 $m\leq 0$，$0\leq n\leq 1$，对照四个选项分别列不等式组，解出不等式进行一一验证即可.

【解答】

解：$\because$ 非空集合 $S=\{x|m\leq x\leq n\}$ 满足：当 $x\in S$ 时，有 $x^2\in S$.

$\therefore$ 当 $m\in S$ 时，有 $m^2\in S$，即 $m^2\geq m$，解得：$m\geq 1$ 或 $m\leq 0$;

同理：当 $n\in S$ 时，有 $n^2\in S$，即 $n^2\leq n$，解得：$0\leq n\leq 1$.

对于 A: $m=1$，必有 $m^2=1\in S$，故必有 $\begin{cases}n\geq m\\0\leq n\leq 1\end{cases}$ 解得：$m=n=1$，所以 $S=\{1\}$，故 A 错误;

对于 B: $m=-\frac{1}{2}$，必有 $m^2=\frac{1}{4}\in S$，故必有 $\begin{cases}n\geq m^2\\0\leq n\leq 1\end{cases}$，解得：$\frac{1}{4}\leq n\leq 1$，故 B 正确;

对于 C: 若 $n=\frac{1}{2}$，有 $\begin{cases}m\leq\frac{1}{2}\\m\leq m^2\\m^2\leq\frac{1}{2}\end{cases}$，解得: $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq m\leq 0$，故 C 正确;

对于 D: 若 $n=1$，有 $\begin{cases}m\leq 1\\m\leq m^2\\m^2\leq 1\end{cases}$，解得：$-1\leq m\leq 0$ 或 $m=1$，故 D 错误.

故选：BC

慧博高中数学最新试题 头条 @月亮之光H

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13．某人要买房，随着楼层的升高，上下楼耗费的精力增多，因此不满意度升高.当住第n层楼时，上下楼造成的不满意度为n.但高处空气清新，嘈杂音较小，环境较为安静，因此随着楼层的升高，环境不满意度降低.设住第n层楼时，环境不满意程度为$\frac{9}{n}$.则此人应选第____3____楼，会有一个最佳满意度.

14.对于集合 A,B,用 card(A)表示有限集合 A 中元素的个数，已知 card(A)=M,card(B)=N(M<N)，集合 C 满足 A⊆C⊆B,则符合条件的集合 C 的个数是 __________.

【答案】2^{N-M}

15. 已知集合$A=\{x|\frac{x-1}{x+1}<0\}$，$B=\{x|(x-b)^2<a\}$，若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分条件，则实数$b$的取值范围是_____.

【答案】$(-2,2)$

【解答】解：由$A=\{x|\frac{x-1}{x+1}<0\}=\{x|(x-1)\cdot(x+1)<0\}=\{x|-1<x<1\}$，

当$a=1$时，$B=\{x|(x-b)^2<1\}=\{x|b-1<x<b+1\}$，

此时，$A\cap B\neq\varnothing$，所以$\begin{cases}b+1>-1\\b-1<1\end{cases}$,解得$-2<b<2$.

故答案为：$(-2,2)$.

16．已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，则$\frac{1}{a+2b-3ab}$的最大值是______.

【答案】$\frac{3}{2}$

【详解】解：因为$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，所以$a\in(0,1),b\in(0,1)$，

$$\frac{1}{a+2b-3ab}=\frac{1}{1+b-3ab}=\frac{1}{1+(1-a)(1-3a)}=\frac{1}{3a^2-4a+2},$$

当$a=\frac{2}{3}$时，$3a^2-4a+2$取最小值$\frac{2}{3}$所以$\frac{1}{3a^2-4a+2}$取最大值$\frac{3}{2}$，

故$\frac{1}{a+2b-3ab}$的最大值是$\frac{3}{2}$.　　故答案为：$\frac{3}{2}$.

三、解答题

17．设全集$U=\mathrm{R}$，集合$A=\{x|1\le x\le 5\}$，集合$B=\{x|-1-2a\le x\le a-2\}$.

(1)若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件，求实数a的取值范围；

(2)若$B\subseteq A$，求实数a的取值范围.

【详解】(1) 由“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件，得A　B，

又$A=\{x|1\le x\le 5\}$，$B=\{x|-1-2a\le x\le a-2\}$，

慧博高中数学最新试题 头条 @月亮之光H

因此$\begin{cases}-1-2a<1\\a-2\geq 5\end{cases}$或$\begin{cases}-1-2a\leq 1\\a-2>5\end{cases}$，解得$a\geq 7$，

所以实数a的取值范围为$a\geq 7$.

（2）由已知　$B\subseteq A$，

当$B=\varnothing$时，$-1-2a>a-2$，解得$a<\frac{1}{3}$，符合题意，因此$a<\frac{1}{3}$；

当$B\neq\varnothing$时，而$A=\{x\,|\,1\leq x\leq 5\}$，$B=\{x\,|\,-1-2a\leq x\leq a-2\}$，

则$1\leq -1-2a\leq a-2\leq 5$，无解，

所以实数a的取值范围$a<\frac{1}{3}$.

18．已知命题$p:\forall x\in[-1,1],x^2+2x-k\leq 0$，命题$q:\exists x\in \mathrm{R},x^2+2kx+3k+4=0$．

(1)当命题$\neg p$为假命题时，求实数k的取值范围；

(2)若命题p和q中有且仅有一个是假命题，求实数k的取值范围.

【详解】（1）当命题$\neg p$为假命题时，命题p为真命题，

$p:\forall x\in[-1,1],x^2+2x\leq k$，

当$x\in[-1,1]$时，$x^2+2x\in[-1,3]$，在此处键入公式。

$\therefore k\geq (x^2+2x)_{\max}=3$，即$k\geq 3$

$\therefore$实数k的取值范围为$k\geq 3$.

（2）$\because$命题p和q中有且仅有一个是假命题，

$\therefore$命题p和q一真一假，

当命题q为真命题时，$\Delta=4k^2-4(3k+4)\geq 0$，解得$k\leq -1$或$k\geq 4$，

①当命题p为真，命题q为假时，

$\begin{cases}k\geq 3\\-1<k<4\end{cases}$，解得$3\leq k<4$，

②当命题q为真，命题p为假时，

$\begin{cases}k<3\\k\in[4,+\infty)\cup(-\infty,-1]\end{cases}$，解得$k\leq -1$，

综上，实数k的取值范围为$(-\infty,-1]\cup[3,4)$.

19.记不等式$ax+b>0$的解集为A，不等式$(ax-b)(x-a)\geq 0$的解集为B

（1）设$a\in R,b=-2a$，求A；

慧博高中数学最新试题
头条 @月亮之光H

（2）若 $A=(-\infty,1)$，求 B

【详解】（1）由 $a\in R, b=-2a$，可得 $ax-2a=a(x-2)>0$，

当 $a>0$ 时，解得 $x>2$，

当 $a=0$ 时，无解，

当 $a<0$ 时，解得 $x<2$，

综上，当 $a>0$ 时，解集 $A=\{x|x>2\}$，

当 $a=0$ 时，解集 $A=\varnothing$，

当 $a<0$ 时，解集 $A=\{x|x<2\}$.

（2）若 $A=(-\infty,1)$，则 $a<0$，且 $a+b=0$，即 $\boldsymbol{b=-a}$，

所以原式化简为：$(ax+a)(x-a)\geq 0$，即 $(-ax-a)(x-a)\leq 0$，

当 $a<-1$ 时，解得 $a\leq x\leq -1$，

当 $a=-1$ 时，解得 $x=-1$，

当 $-1<a<0$ 时，解得 $-1\leq x\leq a$，

综上当 $a<-1$ 时，集合 $B=\{x|a\leq x\leq -1\}$，

当 $a=-1$ 时，集合 $B=\{-1\}$，

当 $-1<a<0$ 时，集合 $B=\{x|-1\leq x\leq a\}$

20．为宣传 2023 年杭州亚运会，某公益广告公司用一条长度为 1m 的铁丝，首尾相连做成一个直角三角形的海报纸，求：

（1）海报纸的斜边最短是多少？

（2）若在该海报纸画一个内切圆，则直角三角形内切圆半径 r 最大值是多少？

【答案】解：(1)假设直角三角形两条直角边为 x，y，$(0<x<1, 0<y<1)$，斜边长为 $\sqrt{x^2+y^2}$，

$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=1$，

$\because (x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$，

$\therefore 1=x+y+\sqrt{x^2+y^2}\leqslant(\sqrt{2}+1)\sqrt{x^2+y^2}$，

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}\geq \frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ 当且仅当 $x=y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

所以斜边 $\sqrt{x^2+y^2}$ 最短是 $\sqrt{2}-1$;

慧博高中数学最新试题 头条 @月亮之光H

(2)由直角三角形的内切圆半径$r=\frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{2}$，

又$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=1$，$\therefore r=\frac{2(x+y)-1}{2}=x+y-\frac{1}{2}$，

$\because 2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$，　　$\therefore \sqrt{x^2+y^2}\ge\frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}$

$\therefore x+y+\sqrt{x^2+y^2}\ge x+y+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})(x+y)$，

即 $1\ge(1+\frac{\sqrt{2}}{2})(x+y)$，

$\therefore x+y\le\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=2-\sqrt{2}$，

当且仅当$x=y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$时等号成立，$\therefore r=x+y-\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}-\sqrt{2}$，

该直角三角形内切圆半径r最大值是$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$.

21．设函数$y=ax^2+x-b(a\in R,b\in R)$.

(1)若$b=1$，且集合$\{x|y=0\}$中有且只有一个元素，求实数a的取值集合；

(2)解关于x的不等式$y<(a-1)x^2+(b+2)x-2b$；

(3)当$a>0,b>1$时，记不等式$y>0$的解集为P，集合$Q=\{x|-2-t<x<-2+t\}$.若对于任意正数t,$P\cap Q\ne\emptyset$，求$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$的最大值.

【解答过程】（1）由题设$y=ax^2+x-1(a\in R)$，又$\{x|y=0\}$有且只有一个元素，

所以$ax^2+x-1=0$有且仅有一个根，

当$a=0$时，$x-1=0$，即$x=1$，则$\{x|y=0\}=\{1\}$，满足题设；

当$a\ne0$时，$\Delta=1+4a=0$，即$a=-\frac{1}{4}$，则$\{x|y=0\}=\{2\}$，满足题设；

所以a的取值集合为$\{-\frac{1}{4},0\}$.

（2）由题设$ax^2+x-b<(a-1)x^2+(b+2)x-2b$，整理得$x^2-(b+1)x+b=(x-b)(x-1)<0$，

当$b<1$时，解集为$\{x|b<x<1\}$；

当$b=1$时，解集为$\emptyset$；

当$b>1$时，解集为$\{x|1<x<b\}$；

（3）由$t>0$，恒有$t-2>-t-2$，故$Q\ne\emptyset$，

$y=f(x)=ax^2+x-b>0$且$a>0,b>1$，故$f(x)$开口向上且$f(0)=-b<0$，故对应一元二次方程恒有两个不等实根，且在y轴两侧，

因为$P\cap Q\ne\emptyset$，即$f(x)>0$在$(-2-t,-2+t)$上有解，且$\forall t\in(0,+\infty)$，

又区间$(-2-t,-2+t)$关于$x=-2$对称，且区间长度$2t\in(0,+\infty)$，

慧博高中数学最新试题 头条@月亮之光H

综上，只需保证$f(-2)=4a-2-b=0$，则 $4a-b=2$，且$b=4a-2>1$，即$a>\frac{3}{4}$，

所以$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(\frac{2}{a}-\frac{2}{b})=\frac{1}{2}(\frac{4a-b}{a}-\frac{4a-b}{b})=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b})\leq\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=\frac{1}{2}$，

当且仅当$b=2a$，即$a=1>\frac{3}{4}$,$b=2>1$ 时等号成立，

故$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$的最大值为$\frac{1}{2}$.

22. 已知二次函数$y=ax^2+bx+2(a,b$为实数$)$

(1)若$x=1$ 时，$y=1$ 且对$\forall x\in(2,5)$，$y>0$ 恒成立，求实数a的取值范围；

(2)若$x=1$ 时，$y=1$ 且对$\forall a\in[-2,-1]$，$y>0$ 恒成立，求实数x的取值范围；

(3)对$\forall x\in R$，$b>0$ 时，$y\geq0$ 恒成立，求$\frac{a+2}{b}$的最小值.

【答案】解：(1) $\because x=1$ 时$y=1$，$\therefore a+b+2=1$，即$b=-1-a$，

$\because\forall x\in(2,5)$，$y>0$ 恒成立，即$ax^2-(1+a)x+2>0$ 恒成立，$\therefore ax(x-1)>x-2$ 恒成立，

$\because x\in(2,5)$，$\therefore a>\frac{x-2}{x(x-1)}$对$\forall x\in(2,5)$恒成立，$\therefore a>\left[\frac{x-2}{x(x-1)}\right]_{\max}$.

令$t=x-2$，则$t\in(0,3)$，

则$\frac{x-2}{x(x-1)}=\frac{t}{(t+2)(t+1)}=\frac{t}{t^2+3t+2}=\frac{1}{t+\frac{2}{t}+3}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}+3}=3-2\sqrt{2}$，

当且仅当$t=\frac{2}{t}$，即$t=\sqrt{2}$，此时$x=2+\sqrt{2}$时取“=”，

所以实数a的取值范围时$(3-2\sqrt{2},+\infty)$.

(2) $\because x=1$ 时$y=1$，$\therefore a+b+2=1$，即$b=-1-a$，

$\because\forall a\in[-2,-1]$，$y>0$ 恒成立，即$ax^2-(1+a)x+2>0$ 对$\forall a\in[-2,-1]$恒成立，

$\therefore(x^2-x)a-x+2>0$ 对$\forall a\in[-2,-1]$恒成立.

$$\therefore\begin{cases}-2x^2+x+2>0\\-x^2+2>0\end{cases},\therefore\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4},$$

所以实数x的取值范围是$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

(3)对$\forall x\in R$，$b>0$ 时，$y\geq0$ 恒成立，$\therefore\begin{cases}a>0\\\Delta=b^2-8a\leq0\end{cases}$，则$a\geq\frac{b^2}{8}$.

$\therefore\frac{a+2}{b}\geq\frac{\frac{b^2}{8}+2}{b}=\frac{b}{8}+\frac{2}{b}\geq2\sqrt{\frac{b}{8}\cdot\frac{2}{b}}=1$，当且仅当$\frac{b}{8}=\frac{2}{b}$且$a=\frac{b^2}{8}$，即$b=4,a=2$ 时取等号，

所以$\frac{a+2}{b}$最小值是 1.

慧博高中数学最新试题 头条@月亮之光H