江苏省南京市雨花台中学2022-2023学年高一上学期期中数学试卷

【参考答案】

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填写在答题卡相应位置上.

1．已知集合 $A=\{x||x|<2\}$，$B=\{x|x-1>0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x|-2<x<1\}$　　B．$\{x|x>-2\}$　　C．$\{x|1<x<2\}$　　D．$\{x|x>1\}$

【分析】解不等式，分别求出关于 A，B 的范围，求出 A，B 的并集即可.

【解答】解：∵$A=\{x||x|<2\}=\{x|-2<x<2\}$，

$B=\{x|x-1>0\}=\{x|x>1\}$，

∴$A\cup B=\{x|x>-2\}$，

故选：B.

【点评】本题考查了集合的运算，考查不等式问题，是一道基础题.

2．已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $A(4,2)$，$B(16,m)$，则 $m=$（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【分析】由题意可得 $4^m=2$，解得 $m=\frac{1}{2}$，再求解 $f(16)$ 即可求得结果.

【解答】解：由已知幂函数 $f(x)=x^m$ 的图象经过点 $(4,2)$，

则有 $4^m=2$，解得 $m=\frac{1}{2}$，

则 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，

故 $f(16)=16^{\frac{1}{2}}=4$，

即 $m=4$，

故选：C.

【点评】本题主要考查用待定系数法求函数的解析式，求函数的值，属于基础题.

3．已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=-x^2+2x$，则 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=$（　　）

A．$f(x)=-x^2-2x$　　B．$f(x)=-x^2+2x$

C．$f(x)=x^2-2x$　　D．$f(x)=x^2+2x$

【分析】利用偶函数将 $x\in(0,+\infty)$ 的情况转化为 $x\in(-\infty,0)$ 的情形，代入解析式即可.

【解答】解：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-x\in(-\infty,0)$，又 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，

所以 $f(x)=f(-x)=-x^2-2x$，即 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=-x^2-2x$，

故选：A.

【点评】本题考查偶函数的性质，以及对称区间上解析式的求法，属于基础题.

4．定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在（－∞，0）上单调递减，且 $f(3)=0$，则满足 $xf(x)>0$ 的 x 的取值范围是（　　）

A．（－∞，－3）∪（3，+∞）　　　　B．（－3，0）∪（3，+∞）

C．（－3，0）∪（0，3）　　　　D．（－∞，－3）∪（0，3）

【分析】由题意可得 $f(x)$ 在（－∞，0）上单调递减，在（0，+∞）上是减函数，且 $f(-3)=f(3)=0$，再讨论 $x>0$，$x<0$，可得不等式的解集.

【解答】解：由定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在（－∞，0）上单调递减，

可得 $f(x)$ 在（0，+∞）上是减函数；

又 $f(-3)=-f(3)=0$，

不等式 $xf(x)>0$，等价为$\begin{cases}x>0\\f(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\f(x)<0\end{cases}$，

所以 $x>0$ 时，即有 $f(x)>0=f(3)$，解得 $0<x<3$；

$x<0$ 时，即有 $f(x)<0=f(-3)$，解得 $-3<x<0$.

综上可得 $xf(x)>0$ 的解集为（－3，0）∪（0，3）.

故选：C.

【点评】本题考查函数的奇偶性和单调性的定义和运用，考查转化思想和分类讨论思想、运算能力，属于基础题.

5．已知函数 $f(x)=|x^2-2x-3|$在$[-1,m]$上的最大值为 $f(m)$，则 m 的取值范围是（　　）

A．$(-1,1]$　　　　B．$(-1,1+2\sqrt{2}]$

C．$[1+2\sqrt{2},+\infty)$　　　　D．$(-1,1]\cup[1+2\sqrt{2},+\infty)$

【分析】本题先画出函数 $f(x)$ 大致图象，然后根据图象对 m 进行分类谈论，即可得到 m 的取值范围.

【解答】解：由题意，函数 $f(x)$ 大致图象如下：

根据题意及图，可知

当 $-1<m\leqslant 1$ 时，$f(x)_{max}=f(m)$.

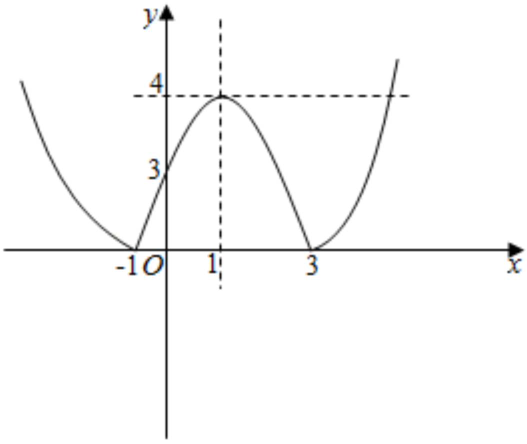
令 $x^2-2x-3=4$，解得 $x=1\pm2\sqrt{2}$，

则当 $1<m<1+2\sqrt{2}$时，$f(x)_{max}=f(1)\neq f(m)$.

. 当 $m\geqslant 1+2\sqrt{2}$时，$f(x)_{max}=f(m)$.

∴满足题意的 m 的取值范围为：$(-1,1]\cup[1+2\sqrt{2},+\infty)$.

故选：D.



【点评】本题主要考查函数最值的问题，考查了数形结合法和分类讨论思想的应用．本题属中档题．

6．核酸检测在新冠疫情防控核中起到了重要作用，是重要依据之一，核酸检测是用荧光定量 *PCR* 法进行的，通过化学物质的荧光信号，对在 *PCR* 扩增过程中的靶标 *DNA* 进行实时检测．已知被标靶的 *DNA* 在 *PCR* 扩增期间，每扩增一次，*DNA* 的数量就增加 $p\%$．若被测标本 *DNA* 扩增 5 次后，数量变为原来的 10 倍，则 p 的值约为（　　）．（参考数据：$10^{0.2}\approx1.585$，$10^{-0.2}\approx0.631$）

A．36.9　　　　B．41.5　　　　C．58.5　　　　D．63.1

【分析】设 *DNA* 数量没有扩增前数量为 a，由题意可得，$a(1+p\%)^5=10a$，即 $(1+p\%)^5=10$，再根据指数函数的公式，即可求解．

【解答】解：设 *DNA* 数量没有扩增前数量为 a，

由题意可得，$a(1+p\%)^5=10a$，即 $(1+p\%)^5=10$，

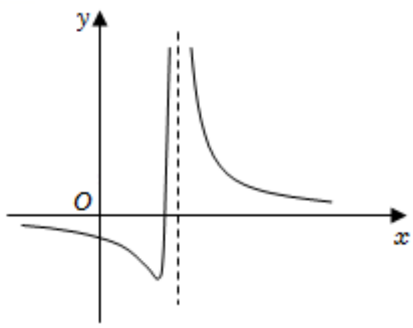
所以 $1+p\%=10^{0.2}$，即 $p\%=10^{0.2}-1\approx1.585-1=0.585$，

故 $p=58.5$．

故选：C．

【点评】本题主要考查函数的实际应用，掌握指数函数的公式是解本题的关键，属于基础题．

7．函数 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示，则（　　）



A．$a<0$，$b<0$，$c<0$　　　　B．$a>0$，$b<0$，$c>0$

C．$a>0$，$b>0$，$c<0$　　　　D．$a>0$，$b<0$，$c<0$

【分析】由函数的定义域可判断 c 的符号，分别令 $x=0$，$y=0$ 可判断 a，b 的符号．

【解答】解：函数 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的定义域为 $\{x|x\neq -c\}$，

由图象可知 $-c>0$，$\therefore c<0$，

令 $f(x)=0$ 得 $x=-\frac{b}{a}$，则 $-\frac{b}{a}>0$，$\therefore \frac{b}{a}<0$，

令 $x=0$ 得 $y=\frac{b}{c^2}$，则 $\frac{b}{c^2}<0$，$\therefore b<0$，

$\therefore a>0$，

即 $a>0$，$b<0$，$c<0$，

故选：D.

【点评】本题主要考查了函数的图象的应用，是基础题.

8．已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(-x)$，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，不等式 $f(ax+2)\leqslant f(-1)$ 对于 $x\in[1,2]$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-\frac{3}{2}]$　B．$(-\infty,-\frac{1}{2}]$　C．$[-3,-\frac{1}{2}]$　D．$[-\frac{3}{2},-1]$

【分析】根据条件可得 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称以及在 $(-\infty,0)$ 上递减，则 $-\frac{3}{x}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，解出范围即可.

【解答】解：由题可知，$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，且函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，

由函数 $f(x)$ 的图象特征可得 $-1\leqslant ax+2\leqslant 1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，得 $-\frac{3}{x}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，所以 $-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant -1$.

故选：D.

【点评】本题考查函数对称性，单调性，涉及函数恒成立问题，利用分离参数法解不等式即可求出范围，属于中档题.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填写在答题卡相应位置上，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，不选或有选错的得 0 分。

（多选）9．下列四组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是（　　）

A．$f(x)=x+1$，$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

B．$f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$

C．$f(x)=(x-1)^0$，$g(x)=1$

D．$f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}$，$g(x)=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}$

【分析】根据两个函数的定义域相同，对应关系也相同，即可判断它们是同一个函数.

【解答】解：对于 A，$f(x)=x+1$，定义域为 **R**，$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ 的定义域为 $\{x|x\neq1\}$，两函数定义域不同，不是同一函数；

对于 B，$f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{1-x}=\sqrt{1-x^2}$，定义域为 $[-1,1]$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，两函数定义域相同，对应关系也相同，是同一函数；

对于 C，$f(x)=(x-1)^0=1$，定义域为 $\{x|x\neq1\}$，$g(x)=1$ 的定义域为 **R**，两函数定义域不同，不是同一函数；

对于 D，$f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}=1$，定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}=1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，两函数定义域相同，对应关系也相同，是同一函数．

故选：BD．

【点评】本题考查了判断两个函数是否为同一函数的应用问题，是基础题．

（多选）10．下列命题中正确的是（　　）

A．若 $x>0$，则 $x+\frac{1}{x}\geqslant2$

B．$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}$ 的最小值为 2

C．若 $x<y<0$，则 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$

D．若 $a>b>0$，则 $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$

【分析】利用不等式的性质，逐项验证，即可解出．

【解答】解：因 $x>0$，$\frac{1}{x}>0$，$x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 A 正确；

设 $t=\sqrt{a^2+2}\geqslant\sqrt{2}$，则 $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}=t+\frac{1}{t}$　（$t\geqslant\sqrt{2}$），函数 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $t\geqslant\sqrt{2}$ 时单调递增，所以 $y_{min}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故 $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，B 错误；

若 $x<y<0$，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}>0$，故 C 正确；

若 $a>b>0$，$a+\frac{1}{b}-(b+\frac{1}{a})=(a-b)\frac{ab+1}{ab}>0$，故 D 正确，

故选：ACD．

【点评】本题考查了不等式的性质，学生的数学运算能力，属于基础题．

（多选）11．下列命题中正确的是（　　）

A．函数 $y=2x^2+x+1$ 在（0，+∞）上是增函数

B．函数 $y=\frac{2}{x+1}$ 在（﹣∞，﹣1）∪（﹣1，+∞）上是减函数

C．函数 $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$ 的单调减区间是[2，+∞）

D．已知 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，若 $a+b>0$，则有 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$

【分析】根据二次函数的性质以及单调区间的定义即可求解．

【解答】解：对于 A：函数 $y=2x^2+x+1=2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}$ 在 $[-\frac{1}{4},+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $y=2x^2+x+1$ 在（0，+∞）上是增函数，A 正确；

对于 B：函数 $y=\frac{2}{x+1}$ 在（﹣∞，﹣1），（﹣1，+∞）上均是减函数，但在（﹣∞，﹣1）∪（﹣1，+∞）上不是减函数，如﹣2＜0，但 $\frac{1}{-2+1}<\frac{1}{0+1}$，$B$ 错误；

对于 C：函数 $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$ 的定义域为[﹣1，5]，函数 $y=-x^2+4x+5$ 对称轴为 $x=2$，函数 $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$ 的单调减区间是[2，5]，C 错误；

对于 D：若 $a+b>0$，则 $a>-b$，又 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，所以 $f(a)>f(-b)$，同理 $f(b)>f(-a)$，所以 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$，D 正确，

故选：AD．

【点评】本题考查二次函数、反比例函数单调性，以及抽象函数单调性，属于基础题．

（多选）12．对于任意实数 x，x 均能写成的整数部分 $[x]$ 与小数部分 $\{x\}$ 的和，其中 $[x]$ 称为 x 的整数部分函数，$\{x\}$ 称为 x 的小数部分函数，即 $x=[x]+\{x\}$．比如 $1.7=[1.7]+\{1.7\}=1+0.7$，其中 $[1.7]=1$，$\{1.7\}=0.7$，$[-1.7]=-2$，$\{-1.7\}=0.3$，则下列的结论正确的是（　　）

A．$\{-\frac{1}{3}\}=\frac{2}{3}$

B．$0\leqslant\{x\}<1$

C．$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，$\{x\}+\{y\}=\{x+y\}+1$

D．存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\{x_0\}+\{\frac{1}{x_0}\}=1$

【分析】A．根据 $\{x\}$ 的含义判断；

B．根据 $\{x\}$ 的含义判断；

C．由 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 判断；

D．由 $x_0=1$ 判断．

【解答】解：A．因为 $\{x\}$ 称为 x 的小数部分，所以 $\{-\frac{1}{3}\}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，故正确；

B．因为 $\{x\}$ 称为 x 的小数部分，所以 $0\leqslant\{x\}<1$，故正确；

C．当 $x=1.3$，$y=0.3$ 时，$\{x\}+\{y\}=0.3+0.3=0.6$，$\{x+y\}+1=\{1.6\}+1=1.6$，故 $\{x\}+\{y\}\neq\{x+y\}+1$，故错误；

D．当 $x_0=2+\sqrt{3}$ 时，$\{x_0\}+\{\frac{1}{x_0}\}=1$，故正确．

故选：ABD．

【点评】本题主要考查分段函数的性质，属于中档题．

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分；共 20 分，请把答案填写在答题卡相应位置上．

13．已知 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=\begin{cases}x-9, & x>3\\ |x-2|+a, & x\leqslant 3\end{cases}$，若 $f(f(2\sqrt{3}))=5$，则 $a=$__4__．

【分析】根据题意，由函数的解析式求出则 $f(f(2\sqrt{3}))$ 的表达式，分析可得关于 a 的方程，解可得答案．

【解答】解：根据题意，$f(x)=\begin{cases}x-9, & x>3\\ |x-2|+a, & x\leqslant 3\end{cases}$，

则 $f(2\sqrt{3})=(2\sqrt{3})^2-9=3$，

则 $f(f(2\sqrt{3}))=f(3)=|3-2|+a=a+1=5$，

则 $a=4$；

故答案为：4．

【点评】本题考查分段函数的求值，注意分段函数的解析式，属于基础题．

14．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2(a-1)x+5, & x\leqslant 1\\ -x+a, & x>1\end{cases}$，满足对于任意实数 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，

则实数 a 的取值范围是 __[2，3]__．

【分析】根据 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，得到 $f(x)$ 在定义域上单调递减，只需保证分段函数的每一段单调递减和在交界处单调递减即可．

【解答】解：由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 可知 $f(x)$ 为定义域上的减函数，

所以 $\begin{cases}-\frac{-2(a-1)}{2}\geqslant 1\\ 8-2a\geqslant -1+a\end{cases}$，解得 $2\leqslant a\leqslant 3$，

故答案为：[2，3]．

【点评】本题主要考查分段函数的性质，属于中档题．

15．已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（a，b，$c\in\mathbf{R}$），关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，则 $\frac{a^2+b+4}{c}$ 的最大值为 __$-\frac{7}{2}$__．

【分析】由已知结合二次不等式与二次方程的关系可得 a，b，c 的关系，代入后结合基本不等式可求．

【解答】解：由题意得 $a<0$ 且 $x=1$，$x=2$ 是方程的根，

故 $-\frac{b}{a}=1+2=3$，$\frac{c}{a}=1\times2=2$，

所以 $b=-3a$，$c=2a$，

所以$\frac{a^2+b+4}{c}=\frac{a^2-3a+4}{2a}=\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-\frac{3}{2}=-[(-\frac{a}{2})+(-\frac{2}{a})]-\frac{3}{2}\leqslant-2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$,

当且仅当 $-\frac{2}{a}=-\frac{a}{2}$，即 $a=-2$ 时取等号，此时$\frac{a^2+b+4}{c}$取最大值 $-\frac{7}{2}$.

故答案为：$-\frac{7}{2}$.

【点评】本题主要考查了二次不等式与二次方程根的关系，还考查了基本不等式在最值求解中的应用，属于中档题.

16.（3 分）十六、十七世纪之交，随着天文、航海、工程、贸易及军事的发展，改进数字计算方法成了当务之急，约翰•纳皮尔正是在研究天文学的过程中，为了简化其中的计算而发明了对数，后来天才数学家欧拉发现了对数与指数的关系，即 $a^b=N\Leftrightarrow b=\log_aN$．现已知 $a=\log_26$，$3^b=36$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=$__1__，$2^{\frac{a}{b}}=$__$\sqrt{3}$__.

【分析】根据换底公式和对数的运算性质即可求出.

【解答】解：$a=\log_26$，$3^b=36$，

则 $b=\log_336=2\log_36$

则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\log_62+\log_63=\log_66=1$，

$\frac{a}{b}=\frac{\log_26}{2\log_36}=\frac{\frac{\lg6}{\lg2}}{\frac{2\lg6}{\lg3}}=\frac{\lg3}{2\lg2}=\frac{1}{2}\log_23=\log_2\sqrt{3}$,

则 $2^{\frac{a}{b}}=2^{\log_2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,

故答案为：1，$\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了对数式和指数式的互化，以及换底公式，对数的运算性质，属于基础题.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. （10 分）(1) 求值：$(lg5)^2+lg2\cdot lg50+2^{\log_25}$,

(2) 已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $3f(x+1)-2f(x-1)=x+6$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

【分析】(1) 由已知结合对数运算性质即可求解；

(2) 利用待定系数法即可求解函数解析式.

【解答】解：(1) $(lg5)^2+lg2\cdot lg50+2^{\log_25}$

$=(lg5)^2+(1-lg5)\cdot(lg5+1)+5$

$=6$;

（2）设 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$，

由 $3f(x+1)-2f(x-1)=x+6$ 得 $3ax+3a+3b-2ax+2a-2b=x+6$，

所以 $ax+5a+b=x+6$，

所以 $a=1$，$b=1$，$f(x)=x+1$．

【点评】本题主要考查了对数的运算性质及待定系数法求函数解析式，属于基础题．

18．（12 分）已知函数 $y=\sqrt{x^2-2x}$ 的定义域为集合 A，函数 $y=x^2+2x+m\ (x\in[-2,2))$ 的值域为集合 B．

（1）若 $m=-3$，求集合 A，B 及 $A\cap B$；

（2）若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围．

【分析】（1）根据已知条件，结合函数的性质，求出集合 A，B，再结合交集的定义，即可求解．

（2）由已知条件，推得 $B\subseteq A$，再列出不等式，即可求解．

【解答】解：（1）$x^2-2x\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0$，

函数 $y=\sqrt{x^2-2x}$ 的定义域为集合 $A=\{x|x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0\}$，

当 $m=-3$ 时，$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，对称轴为 $x=-1$，

$\because x\in[-2,2)$，

$\therefore y_{min}=(-1+1)^2-4=-4$，$y_{max}<2^2+2\times 2-3=5$，

$\therefore B=\{x|-4\leqslant x<5\}$，

$\therefore A\cap B=[-4,0]\cup[2,5)$．

（2）$\because$“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，

$\therefore B\subseteq A$，

$\therefore y=x^2+2x+m=(x+1)^2+m-1\geqslant m-1$，$y_{max}<2^2+2\times 2+m=8+m$，

$\therefore B=\{x|m-1\leqslant x<8+m\}$

又 $\because A=\{x|x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0\}$，$B\subseteq A$，

$\therefore 8+m\leqslant 0$ 或 $m-1\geqslant 2$，解得 $m\leqslant -8$ 或 $m\geqslant 3$，

故 m 的取值范围为 $(-\infty,-8]\cup[3,+\infty)$．

【点评】本题主要考查集合的运算，考查转化能力，属于中档题．

19．（12 分）新冠肺炎疫情发生以后，口罩供不应求，某口罩厂日夜加班生产，为抗击疫情做贡献．生产口罩的固定成本为 200 万元，每生产 x 万箱，需另投入成本 $p(x)$ 万元，当产量不足 90 万箱时，$p(x)=\frac{1}{2}x^2+40x$；

当产量不小于 90 万箱时，$p(x)=101x+\frac{8100}{x}-2180$，若每箱口罩售价 100 元，通过市场分析，该口罩厂生产的口罩可以全部销售完．

（1）求口罩销售利润 y（万元）关于产量 x（万箱）的函数关系式；

（2）当产量为多少万箱时，该口罩生产厂在生产中所获得利润最大？

【分析】（1）根据题意结合“利润＝销售收入﹣成本”，即可列出函数关系式；

（2）利用二次函数性质及基本不等式，求出分段函数各段函数上的最大值即可求解．

【解答】解：（1）当 $0<x<90$ 时，$y=100x-(\frac{1}{2}x^2+40x)-200=-\frac{1}{2}x^2+60x-200$；

当 $x\geqslant 90$ 时，$y=100x-(101x+\frac{8100}{x}-2180)-200=1980-(x+\frac{8100}{x})$，

$$\therefore y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+60x-200, & 0<x<90\\ 1980-(x+\frac{8100}{x}), & x\geqslant 90\end{cases}.$$

（2）①当 $0<x<90$ 时，$y=-\frac{1}{2}x^2+60x-200=-\frac{1}{2}(x-60)^2+1600\leqslant 1600$，

②当 $x\geqslant 90$ 时，$y=1980-(x+\frac{8100}{x})\leqslant 1980-2\sqrt{x\cdot\frac{8100}{x}}=1800>1600$，

当且仅当 $x=\frac{8100}{x}$，即 $x=90$ 时，y 取得最大值，最大值为 1800 万元．

综上，当产量为 90 万箱时，该口罩生产厂在生产中获得利润最大，最大利润为 1800 万元．

【点评】本题是一道关于分段函数的实际应用题，关键是熟练掌握二次函数的性质及基本不等式的应用，属于中档题．

20．（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{mx+n}{x^2+1}$是定义在$[-1,1]$上的奇函数，且 $f(1)=1$．

（1）求 m，n 的值；

（2）试判断函数 $f(x)$ 的单调性，并证明你的结论；

（3）求使 $f(a-1)+f(a^2-1)<0$ 成立的实数 a 的取值范围．

【分析】（1）由奇函数的性质可得 $f(0)=0$，结合 $f(1)=1$，解方程可得 m，n 的值；

（2）$f(x)$ 在$[-1,1]$上为增函数，再由单调性的定义证明，注意运用因式分解和不等式的性质；

（3）由奇函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上为增函数，可将不等式的两边的“f”去掉，解不等式可得所求取值范围．

【解答】解：（1）函数 $f(x)=\frac{mx+n}{x^2+1}$是定义在$[-1,1]$上的奇函数，

且 $f(1)=1$，可得 $f(0)=0$ 即 $n=0$；

又$\frac{1}{2}(m+n)=1$，则 $m=2$，所以 $m=2$，$n=0$；

（2）$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$在$[-1,1]$上为增函数．

证明：设 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1}{x_1^2+1}-\frac{2x_2}{x_2^2+1}$

$=\frac{2(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$，

由 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，可得 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2<1$，

则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为增函数；

（3）由 $f(x)$ 为奇函数，

可得 $f(a-1)+f(a^2-1)<0$ 即为 $f(a-1)<-f(a^2-1)=f(1-a^2)$，

由 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为增函数，可得 $-1\leqslant a-1<1-a^2\leqslant 1$，

解得 $0\leqslant a<1$，即 a 的取值范围是 $[0,1)$.

【点评】本题考查函数的奇欧旭和单调性的定义和运用，考查转化思想和运算能力，属于基础题.

21.（12 分）设 $f(x)=ax^2+(1-a)x+a-2$.

（1）若不等式 $f(x)\geqslant -2$ 对于一切实数 x 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）解关于 x 的不等式 $f(x)<a-1$（$a\in\mathbf{R}$）.

【分析】(1) 由已知可得，$ax^2+(1-a)x+a-2\geqslant 0$ 对于一切实数 x 恒成立，结合二次函数的性质，分类讨论进行求解

（2）由已知可得，$ax^2+(1-a)x-1<0$，结合二次不等式的求解可求.

【解答】解：(1) $f(x)\geqslant -2$ 对于一切实数 x 恒成立等价于 $ax^2+(1-a)x+a\geqslant 0$ 对于一切实数 x 恒成立，

当 $a=0$ 时，不等式可化为 $x\geqslant 0$，不满足题意；

当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases}a>0\\ \Delta\leqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0\\ (1-a)^2-4a^2\leqslant 0\end{cases}$，

解得：$a\geqslant\frac{1}{3}$；

（2）不等式 $f(x)<a-1$ 等价于 $ax^2+(1-a)x-1<0$

当 $a=0$ 时，不等式可化为 $x<1$，所以不等式的解集为 $\{x|x<1\}$；

当 $a>0$ 时，不等式可化为 $(ax+1)(x-1)<0$，此时 $-\frac{1}{a}<1$，

所以不等式的解集为 $\{x|-\frac{1}{a}<x<1\}$；

当 $a<0$ 时，不等式可化为 $(ax+1)(x-1)<0$，

①当 $a=-1$ 时，$-\frac{1}{a}=1$，不等式的解集为 $\{x|x\neq 1\}$；

②当 $-1<a<0$ 时，$-\frac{1}{a}>1$，不等式的解集为$\{x|x>-\frac{1}{a}$或 $x<1\}$；

③当 $a<-1$ 时，$-\frac{1}{a}<1$，不等式的解集为$\{x|x>1$ 或 $x<-\frac{1}{a}\}$.

【点评】本题主要考查了二次不等式与二次函数性质的相互转化，及二次不等式的恒成立问题，体现了分类讨论思想的应用．

22．（14 分）对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，如果存在区间$[m，n]\subseteq D$．同时满足：①$f(x)$在$[m，n]$内是单调函数；②当定义域是$[m，n]$时，$f(x)$的值域也是$[m，n]$，则称$[m，n]$是该函数的“优美区间”．

（1）求证：$[0，2]$是函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的一个“优美区间”；

（2）函数 $g(x)=4+\frac{6}{x}$是否存在“优美区间”？若存在，求出它的“优美区间”，若不存在，请说明理由．

（3）已知函数 $h(x)=\frac{(a^2+a)x-1}{a^2x}$（$a\in\mathbf{R}$，$a\neq0$）有“优美区间”$[m，n]$，当 a 变化时，求出 $n-m$ 的最大值．

【分析】(1) 通过 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间$[0，2]$上单调递增，利用新定义判断即可．

（2）利用新定义$[m，n]$是已知函数的“优美区间”，推出$\begin{cases}4+\frac{6}{m}=n\\4+\frac{6}{n}=m\end{cases}$，转化求解即可．

（3）设$[m，n]$是已知函数定义域的子集，通过$[m，n]$是已知函数的“优美区间”，则 $h(m)=m$，$h(n)=n$，说明 m、n 是方程 $a^2x^2-(a^2+a)x+1=0$ 的两个同号且不等的实数根，结合根与系数的关系即可求解 $n-m$ 的最大值．

【解答】解：(1) 函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在$[0，2]$上单调递增，所以 $f(x)_{min}=f(0)=0$，$f(x)_{max}=f(2)=2$，即 $f(x)\in[0，2]$，由题“优美区间”的定义可知，$[0，2]$是函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的一个“优美区间”．

（2）假设$[m，n]$是函数 $g(x)=4+\frac{6}{x}$的一个“优美区间”，$g(x)=4+\frac{6}{x}$的定义域为$\{x|x\neq0\}$，

所以$[m，n]\subseteq(-\infty，0)$或$[m，n]\subseteq(0，+\infty)$，又 $g(x)=4+\frac{6}{x}$在$[m，n]$上单调递减，

所以$\begin{cases}4+\frac{6}{m}=n\\4+\frac{6}{n}=m\end{cases}$，

又 $4m+6=mn=6$，即 $m=0$，不符，所以 $g(x)=4+\frac{6}{x}$不存在“优美区间”．

（3）$h(x)$定义域为$\{x|x\neq0\}$，假设$[m，n]\subseteq(-\infty，0)$或$[m，n]\subseteq(0，+\infty)$，

$h(x)=\frac{(a^2+a)x-1}{a^2x}=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x}$在$[m，n]$上单调递增，又$[m，n]$是函数 $h(x)$的“优美区间”，

所以 $h(m)=m$，$h(n)=n$，所以 m，n 是方程 $\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x}=x$，即 $a^2x^2-(a^2+a)x+1=0$ 的两个同号且不等的实数根.

所以 $\Delta=(a^2+a)^2-4a^2>0$，解得 $a<-3$ 或 $a>1$，又 $\begin{cases} m+n=\frac{a+1}{a} \\ mn=\frac{1}{a^2} \end{cases}$，

所以 $n-m=\sqrt{(m+n)^2-4mn}=\sqrt{(\frac{a+1}{a})^2-\frac{4}{a^2}}=\sqrt{-3(\frac{1}{a}-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}}$，

所以当 $a=3$ 时，$n-m$ 取得最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点评】本题考查新定义的应用，函数的值域，考查转化思想以及计算能力，是中档题.

扫码获取更多内部资料