

2022-2023 学年江苏省南京市高一下六校联考 3 月月考

一. 选择题 (共 8 小题)

1. 命题 “ $\exists x > 0, \frac{x}{x-1} < 0$ ” 的否定是 ()

A. $\exists x > 0, \frac{x}{x-1} \geq 0$

B. $\forall x > 0, \frac{x}{x-1} < 0$

C. $\exists x \leq 0, \frac{x}{x-1} < 0$

D. $\forall x > 0, x \leq 0$ 或 $x \geq 1$.

2. $\sin 105^\circ$ 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

3. 已知扇形的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 面积为 3π , 则该扇形的弧长为 ()

A. π

B. 2π

C. 3

D. 6

4. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2, 4)$, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值等于 ()

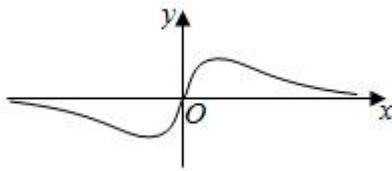
A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

B. $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 可以为 ()



A. $f(x) = \frac{3x}{e^{|x|}}$

B. $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}$

C. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

D. $f(x) = xe^{|x|}$

6. 已知 $a = \ln \frac{e}{3}$, $b = (\frac{5}{3})^{-\frac{1}{2}}$, $c = \ln(2e)$, 则 ()

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

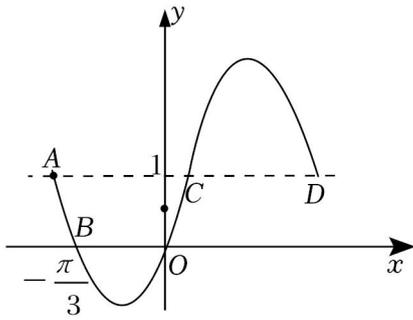
C. $b > c > a$

D. $c > b > a$

7. 已知 $\omega > 0$ 且为正数, 且 $|\phi| < \frac{\pi}{2}$, 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \phi) + 1$ 的图象如图所示,

A, C, D 是 $f(x)$ 的图象与 $y=1$ 相邻的三个交点, 与 x 轴交于相邻的两个交点 O, B ,

若在区间 (a, b) 上, $f(x)$ 有 2020 个零点, 则 $b - a$ 的最大值为 ()



- A. 2020π B. $\frac{3034\pi}{3}$ C. $\frac{3032\pi}{3}$ D. 1012π

8. 已知函数 $f(x) = [x]$ ($[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数), 若函数 $g(x) = e^x - e^{-x} - 2$ 的零点为 x_0 , 则 $g[f(x_0)] =$ ()

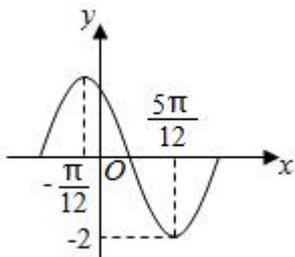
- A. $\frac{1}{e} - e - 2$ B. -2 C. $e - \frac{1}{e} - 2$ D. $e^2 - \frac{1}{e^2} - 2$

二. 多选题 (共 4 小题)

9. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 B. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a < b$
 C. 若 $a > 0, b > 0, 2^a + 3a = 2^b + 4b$, 则 $a > b$
 D. 若 $a > b > 0$, 则 $a + \frac{1}{b} < b + \frac{1}{a}$

10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{2}{3}$, 纵坐标不变, 再将所得函数图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的是 ()



- A. $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$
 B. $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增
 C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{4\pi}{9}$ 对称

D. $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{9}, 0)$ 成中心对称

11. 关于平面向量, 有下列四个命题, 其中说法正确的是 ()

A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 120^\circ$, 则 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{a}$

B. 点 $M(1, -1)$, $N(-3, 2)$, 与向量 \overrightarrow{MN} 同方向的单位向量为 $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

C. 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 2|\vec{a}| \neq 0$, 则 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为 60°

D. 若向量 $\vec{a} = (-2, 1)$, $\vec{b} = (6, 2)$, 则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 上的投影向量为 $-2\vec{a}$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x}{4^x - 4} + \frac{x}{x-1}$, 则 ()

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称

C. $f(x)$ 有唯一一个零点

D. 不等式 $f(2x+3) > f(x^2)$ 的解集为 $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

三. 填空题 (共 4 小题)

13. 请写出一个同时满足下列两个条件的幂函数: $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \geq 1 \\ x^2+x-1, & x < 1 \end{cases}$, 那么 $f(f(4)) = \underline{\hspace{2cm}}$, 若存在实数 a , 使得 $f(a) = f(f(a))$, 则 a 的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

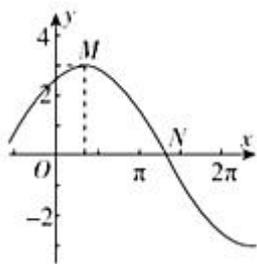
15. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, P 是正方形 $ABCD$ 的外接圆上的动点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的部分图象如图所示, 其中 $M(\frac{\pi}{3},$

3) 是图象的一个最高点, $N(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 是图象与 x 轴的交点, 将函数 $f(x)$ 的图象上所

有所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{12}$ 后, 再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象,

则函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



四. 解答题 (共 6 小题)

17. 已知集合 $A = \{x | a < x < a+1\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$.

(1) 若 $a=1$, 求 $A \cup B$;

(2) 在 ① $A \cup B = B$, ② $(\complement_{\mathbf{R}} B) \cap A = \emptyset$, ③ $B \cup (\complement_{\mathbf{R}} A) = \mathbf{R}$, 这三个条件中任选一个作为已知条件, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知 α 是第四象限角, 且 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

(1) 求 $\tan \alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) + 2\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha - \pi) - 3\cos(2\pi - \alpha)}$ 的值.

19. 已知 $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$, $\sin 2\alpha = -\frac{3}{5}$.

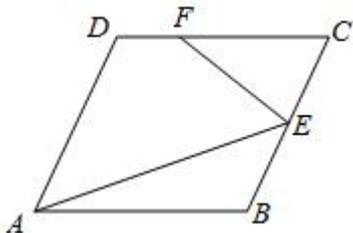
(1) 求 $\tan \alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{5\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 6\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 3\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}$ 的值.

20. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FD}$.

(1) 若 $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 求 $3x+2y$ 的值;

(2) 若 $|\overrightarrow{AB}|=6$, $\angle BAD=60^\circ$, 求 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF}$.



21. 水培植物需要一种植物专用营养液, 已知每投放 a ($0 < a \leq 4$ 且 $a \in \mathbf{R}$) 个单位的营养液, 它在水中释放的浓度 y (克/升) 随着时间 x (天) 变化的函数关系式近似为 $y = af(x)$,

其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{3+x}{3-x} & (0 \leq x \leq 2) \\ 7-x & (2 < x \leq 7) \end{cases}$, 若多次投放, 则某一时刻水中的营养液浓度为每次投

放的营养液在相应时刻所释放的浓度之和, 根据经验, 当水中营养液的浓度不低于 4 (克/升) 时, 它才能有效.

(1) 若只投放一次 2 个单位的营养液, 则有效时间最多可能持续几天?

(2) 若先投放 2 个单位的营养液, 4 天后再投放 b 个单位的营养液, 要使接下来的 2 天中, 营养液能够持续有效, 试求 b 的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = \ln(x+a)$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象过点 $(1, 0)$, $g(x) = x^2 - 2e^{f(x)}$.

(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式;

(2) 设 $m > 0$, 若对于任意 $x \in [\frac{1}{m}, m]$, 都有 $g(x) < -\ln(m-1)$, 求 m 的取值范围.