南京师大附中2023-2024学年度第二学期期中

高一数学

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题日要求的。

1．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a=5$，$b=2$，$C=\frac{\pi}{3}$，则$c=$（　　）

A．$2\sqrt{6}$　　B．$\sqrt{39}$　　C．$\sqrt{29}$　　D．$\sqrt{19}$

2．已知向量$\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(-1,-1)$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$　　B．$\vec{a}\parallel\vec{b}$　　C．$\vec{b}\perp(\vec{a}+\vec{b})$　　D．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

3．已知角α的顶点在坐标原点O，始边与x轴的非负半轴重合.若角α的终边绕着原点按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$后经过点$(1,2)$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．-3　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．3

4．若向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，且$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=53$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为（　　）

A．$\frac{4}{3}\vec{b}$　　B．$-\frac{4}{3}\vec{b}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{4}{9}\vec{b}$

5．在$\triangle ABC$中，D为边BC上一点，$AD=6$，$BD=3$，$\angle ABC=45^\circ$，则$\sin\angle ADC$的值为（　　）

A．$\frac{2+\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$　　C．$\frac{1+\sqrt{7}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

6．$\frac{\sqrt{3}}{2\tan 20^\circ}-2\cos 20^\circ$的值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

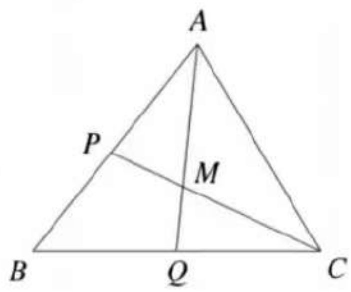
7．如图，在$\triangle ABC$中，点P是边AB上一点，点Q是边BC的中点，AQ与CP交于点M，有下列四个说法：

甲：$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MQ}$；乙：$\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{MP}$；

丙：$S_{\triangle APM}:S_{\triangle MQC}=1:3$；丁：$2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CP}$；

若其中有且仅有一个说法是错误的，则该错误的说法为（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁



8. 在$\triangle ABC$中内角A，B，C的对边分别为a，b，c，设$\triangle ABC$的面积为S，若$2S=3\left(b\sin C+c\sin B\right)$，则下列命题中错误的是（　　）

A．若$A=\dfrac{\pi}{6}$，且$b=7$，则B有两解

B．若$C=2A$，且$\triangle ABC$为锐角三角形，则c的取值范围为$\left(6\sqrt{2},6\sqrt{3}\right)$

C．若$A=2C$，且$\sin B=2\sin C$，则$\triangle ABC$的外接圆半径为$2\sqrt{3}$

D．若$b=2c$，则S的最大值为$6\sqrt{3}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，下列命题中正确的是（　　）

A．若$A>B$，则$\sin A>\sin B$

B．若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$\sin A>\cos B$

C．若$a\cos A=b\cos B$，则$\triangle ABC$一定是等腰直角三角形

D．若$B=60°$，$b^2=ac$，则$\triangle ABC$一定是等边三角形

10．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c.下列条件能推出$A=\dfrac{\pi}{3}$的是（　　）

A．$a\cos C=b+\dfrac{c}{2}$　　　　B．$b\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$

C．$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$，且$\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D．$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$，设向量$\vec{m}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$，$\vec{n}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$\vec{m}$在$\vec{n}$上的投影向量为$-\dfrac{\vec{n}}{2}$

11．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，点G，H，O分别是$\triangle ABC$的重心，垂心，外心.若$\tan A:\tan B:\tan C=2:3:5$，则以下说法正确的是（　　）

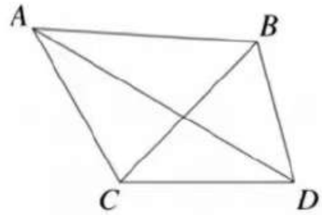
A．$a^2:b^2:c^2=16:21:25$　　　　B．$HA^2:HB^2:HC^2=12:7:3$

C．$S_{\triangle OBC}:S_{\triangle OAC}:S_{\triangle OAB}=8:7:5$　　　　D．$GA^2:GB^2:GB^2=15:12:10$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 在$\triangle ABC$中，点D是边BC上（不包含端点）的动点，若实数x，y满足$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}$的最小值为__________.

13．如图，为了测量河对岸A，B两点之间的距离，在河岸这边取点C，D，测得CD的长为12千米，在点C处测得$\angle ACB=75^\circ$，$\angle ACD=120^\circ$，在点D处测得$\angle ADC=30^\circ$，$\angle ADB=45^\circ$.则A，B两点间的距离为__________千米.（设A，B，C，D四点在同一平面内）



14．设x，y为实数，已知$\sin x+\cos y=\dfrac{2}{3}$，$\cos x+\sin y=\dfrac{1}{3}$，则$\sin\left(x-y\right)$的值为__________.

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．已知函数$f\left(x\right)=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x$.

（1）若$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，求$f\left(x\right)$的取值范围；

（2）设θ为实数，若$f\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，求$f\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值.

16．在以下三个条件中任选一个补充到下面的横线上，并给出解答.（注：如果选择多个条件份分别进行解答，则按第一个解答计分）

①$2a-b=2c\cos B$；②$\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos C+\dfrac{1}{2}$；③向量$\vec{m}=\left(a+c,b-a\right)$，$\vec{n}=\left(a-c,b\right)$，$\vec{m}\perp\vec{n}$.

在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且__________.

（1）求C；

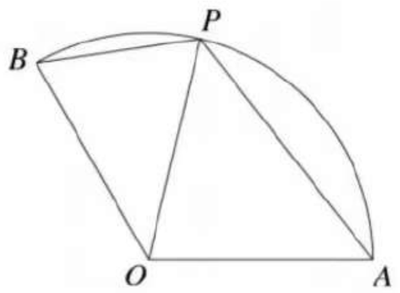
（2）若$c=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

17．已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$为单位向量，设向量$\vec{a}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$．

（1）若$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，求$\vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角；

（2）若$\left|2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|\le 2$，设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\theta$，求$\cos^2\theta$的最小值.

18. 在扇形AOB中，圆心角$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，半径$OA=10$，点$P$在弧$AB$上（不包括端点），设$\angle POA=\theta$.



（1）求四边形$OAPB$的面积S关于θ的函数解析式；

（2）求四边形$OAPB$的面积S的取值范围；

（3）托勒密所著《天文学》第一卷中载有弦表，并且讲述了制作弦表的原理，其中涉及如下定理：在圆的内接四边形中，两条对角线的乘积等于两组对边乘积的和.先分别在线段OA，OB上取点M，N，使得$\triangle MNP$为等边三角形，求$\triangle MNP$面积的最小值.

19. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$\cos(A-C)-\cos B=\dfrac{1}{\tan A+\tan C}$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$.

（1）求B；

（2）若点P在$\triangle ABC$内部，满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=\dfrac{2\pi}{3}$，求$PB^2-PA\cdot PC$的值；

（3）若$\triangle ABC$所在平面内的点Q满足$\angle BQA=\angle BQC=\dfrac{1}{2}\angle AQC=\dfrac{\pi}{3}$，求$(QA+QC-QB)\cdot QB$的值.