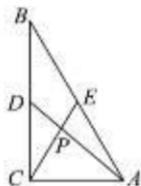


2024 年高一年级 3 月学情调研测试 数学试卷

命题: 高一数学备课组 审核: 朱骏

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请把答案填涂在答题卡相应位置上.

1. 已知点 $A(1, -1)$, $B(-2, 3)$, 则与向量 \overrightarrow{AB} 方向相同的单位向量为 ()
 A. $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ B. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ C. $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ D. $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$
2. 已知单位向量 a, b 的夹角为 60° , 则在下列向量中, 与 b 垂直的是 ()
 A. $a+2b$ B. $2a+b$ C. $a-2b$ D. $2a-b$
3. 计算 $\sin 40^\circ(\sqrt{3}-\tan 10^\circ)=$ ()
 A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. -3
4. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 满足 $|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 A. 等腰直角三角形 B. 直角三角形
 C. 等腰三角形 D. 等边三角形
5. 已知 $\theta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, 且 $\cos\theta - \sin\theta = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, 则 $\frac{2\cos^2\theta - 1}{\cos(\frac{\pi}{4} + \theta)}$ 等于 ()
 A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + \cos \omega x (\omega > 0)$ 在 $[0, \pi]$ 内有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是 ()
 A. $[\frac{8}{3}, \frac{11}{3})$ B. $(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}]$ C. $(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}]$ D. $[\frac{10}{3}, \frac{13}{3})$
7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=1, AB=2, \angle ACB=90^\circ$, BC, AB 边上的两条中线 AD, CE 相交于点 P , 则 $\cos \angle DPE =$ ()
 A. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$
 C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{14}$



二、多项选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 请把答案填涂在答题卡相应位置上. 全部选对得 6 分, 部分选对得 3 分, 不选或有选错的得 0 分.

9. 下列说法中, 错误的有 ()
 A. 单位向量都相等 B. 模相等的两个平行向量相等
 C. 若 $|a| > |b|$ 且 a, b 同向, 则 $a > b$ D. $b \neq 0$, 若 $a \parallel b, b \parallel c$, 则 $a \parallel c$

10. 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x - 1$, 则 ()
- A. $f(x)$ 图象的对称中心为 $(\frac{2\pi}{3} + k\pi, -1) (k \in \mathbb{Z})$
- B. $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- C. $f(x)$ 的增区间为 $[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi] (k \in \mathbb{Z})$
- D. $f(x)$ 的最大值是 1, 最小值是 -3
11. 定义平面向量的一种运算 $a \odot b = |a+b| \times |a-b| \times \sin \langle a, b \rangle$, 其中 $\langle a, b \rangle$ 是 a 与 b 的夹角, 下列说法正确的是 ()
- A. 若 $\langle a, b \rangle = 90^\circ$, 则 $a \odot b = a^2 + b^2$;
- B. 若 $|a| = |b|$, 则 $(a+b) \odot (a-b) = 4a \cdot b$;
- C. 若 $|a| = |b|$, 则 $a \odot b \leq 2|a|^2$;
- D. 若 $a = (1, 2)$, $b = (-2, 2)$, 则 $(a+b) \odot b = \sqrt{10}$.

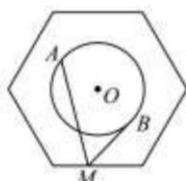
三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

12. 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 且 α, β 为锐角, 则 $\alpha + \beta$ 的值为_____.

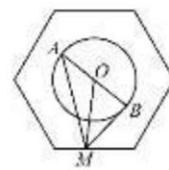
13. 青花瓷(blue and white porcelain), 又称白地青花瓷, 常简称青花, 是中国瓷器的主流品种之一, 属釉下彩瓷. 原始青花瓷于唐宋已见端倪, 成熟的青花瓷则出现在元代景德镇的湖田窑. 图一是一个由波涛纹和葡萄纹构成的正六边形青花瓷盘, 已知图二中正六边形的边长为 2, 圆 O 的圆心为正六边形的中心, 半径为 1, 若点 M 在正六边形的边上运动, 动点 A, B 在圆 O 上运动且关于圆心 O 对称, 则 $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的取值范围是_____.



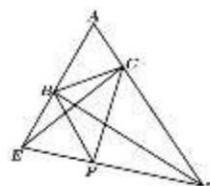
图一



图二



14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=1$, D, E 分别是直线 AB, AC 上的点, $\vec{AE} = 2\vec{BE}$, $\vec{CD} = 4\vec{AC}$, 且 $\vec{BD} \cdot \vec{CE} = -2$, 则 $\angle BAC =$ ____. 若 P 是线段 DE 上的一个动点, 则 $\vec{BP} \cdot \vec{CP}$ 的取值范围是_____.



四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (9 分) 在平面直角坐标系中, 已知 $a = (1, -2)$, $b = (3, 4)$.
- (1) 若 $(3a-b) \parallel (a+kb)$, 求实数 k 的值;
- (2) 若 $(a-tb) \perp b$, 求实数 t 的值.

16. (9分) 已知 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{8}{17}$, α, β 均为锐角.

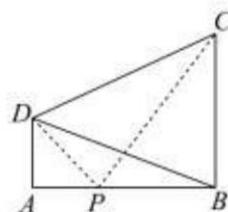
- (1) 求 $\sin 2\alpha$ 的值;
- (2) 求 $\cos\beta$ 的值.

17. (9分) 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是同一平面内的三个向量, 其中 $\mathbf{a} = (3, 4)$.

- (1) 若 $|\mathbf{c}| = 10$, 且 $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$, 求 \mathbf{c} 的坐标;
- (2) 若 $|\mathbf{b}| = \sqrt{10}$, 且 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 与 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 垂直, 求 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 方向上的投影向量.

18. (13分) 如图, 为了测量某条河流两岸两座高塔底部 A, B 之间的距离, 观测者在其中一座高塔的顶部 D 测得另一座高塔底部 B 和顶部 C 的视角为 45° (即 $\angle BDC = 45^\circ$), 已知两座高塔的高 AD 为 30m , BC 为 75m , 塔底 A, B 在同一水平面上, 且 $AD \perp AB$, $BC \perp AB$.

- (1) 求两座高塔底部 A, B 之间的距离;
- (2) 为庆祝 2023 年春节的到来, 在两座高塔顶部各安装了一个大型彩色灯饰. 政府部门为了方便市民观赏这两个彩色灯饰, 决定在 A, B 之间的点 P 处 (点 P 在线段 AB 上) 搭建一个水上观景台, 为了达到最佳的观赏效果, 要求 $\angle DPC$ 最大, 问: 在距离 A 点多远处搭建, 才能达到最佳的观赏效果?



19. (17分) 已知 O 为坐标原点, 对于函数 $f(x) = a\sin x + b\cos x$, 称向量 $\vec{OM} = (a, b)$ 为函数 $f(x)$ 的伴随向量, 同时称函数 $f(x)$ 为向量 \vec{OM} 的伴随函数.

(1) 设函数 $g(x) = \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin x$, 试求 $g(x)$ 的伴随向量 \vec{OM} ;

(2) 记向量 $\vec{ON} = (0, 1)$ 的伴随函数为 $f(x)$, 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{3}$, $fC = \frac{3}{5}$, 求 $\sin(B-A)$ 的值;

(3) 记向量 $\vec{OP} = (\sqrt{3}, 1)$ 的伴随函数为 $f(x)$, 函数 $h(x) = f(2x)$, 函数 $h(x)$ 在区间 $[t, t + \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 M_t , 最小值为 m_t , 设函数 $H(t) = M_t - m_t$. 若 $t \in [\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$, 求函数 $H(t)$ 的值域.

20. (17分) 对于数集 $X = \{-1, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其中 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $n \geq 2$, 定义向量集 $Y = \{\mathbf{a} | \mathbf{a} = (s, t), s \in X, t \in X\}$, 若对任意 $\mathbf{a}_1 \in Y$, 存在 $\mathbf{a}_2 \in Y$, 使得 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$, 则称 X 具有性质 P .

(1) 设 $X = \{-1, 1, 2\}$, 请写出向量集 Y 并判断 X 是否具有性质 P (不需要证明).

(2) 若 $0 < x < \frac{1}{2}$, 且集合 $\{-1, x, \frac{1}{2}, 1\}$ 具有性质 P , 求 x 的值;

(3) 若 X 具有性质 P , 且 $x_2 = q$, q 为常数且 $q > 1$, 求证: $\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \dots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = q$.