

南京一中 2023-2024 学年度第二学期 3 月考试试卷

高一数学

命题人：王印、左皖

校对入：王印、左皖

审核人：王印、左皖

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\cos 17^\circ \sin 13^\circ + \sin 17^\circ \cos 13^\circ = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\cos 4^\circ$ C. $\sin 4^\circ$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知向量 a, b 满足 $|a|=1, |b|=2$, 若 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|a+b| = (\quad)$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{7}$

3. 已知 $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (3, 4)$, 若 $(3\vec{a} - \vec{b}) \parallel (\vec{a} + k\vec{b})$, 则实数 k 的值为 (\quad)

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 1 D. $\frac{1}{3}$

4. 已知正 $\triangle ABC$ 的边长为 1, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ 的值为 (\quad)

- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

5. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\sin \alpha$ 的值为 (\quad)

- A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ C. $\frac{3-2\sqrt{3}}{10}$ D. $\frac{3+2\sqrt{3}}{10}$

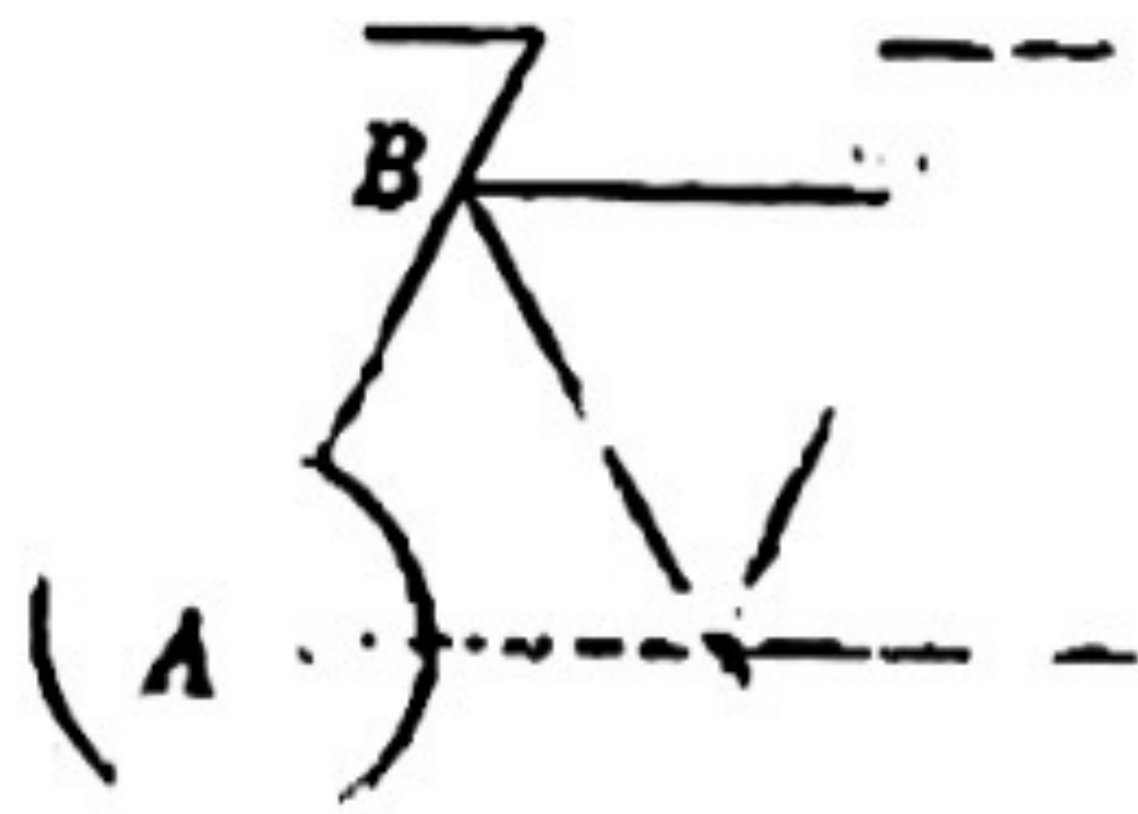
6. 已知非零向量 a, b 满足 $|a|=2|b|$, 且 $(a-b) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角为 (\quad)

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

7. 已知 α, β 为锐角, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$, 则 $\beta = (\quad)$

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

8. 骑自行车是一种环保又健康的运动, 如图是某一自行车的平面结构示意图, 已知图中的圆 A (前轮), 圆 D (后轮) 的半径均为 $\sqrt{3}$, $\triangle ABE, \triangle BEC, \triangle ECD$ 均是边长为 4 的等边三角形. 设点 P 为后轮上的一点, 则在骑行该自行车的过程中, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值为 (\quad)



A.50

B.48

C.60

D.72

二、多选题：本题共3小题，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 下列等式成立的有 ()

A. $\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{2 \cos 10^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 1$

D. $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \sqrt{3}$

10. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形， D, E 分别是 AC, AB 上的两点，且 $\vec{AE} = \vec{EB}$ ，

$AD = 2\vec{DC}$ ， BD 与 CE 交于点 O ，则下列说法正确的是 ()

A. $\vec{AB} \cdot \vec{CE} = -1$

B. $\vec{OE} + \vec{OC} = 0$

C. $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. \vec{ED} 在 \vec{BC} 上的投影向量的模为 $\frac{7}{6}$

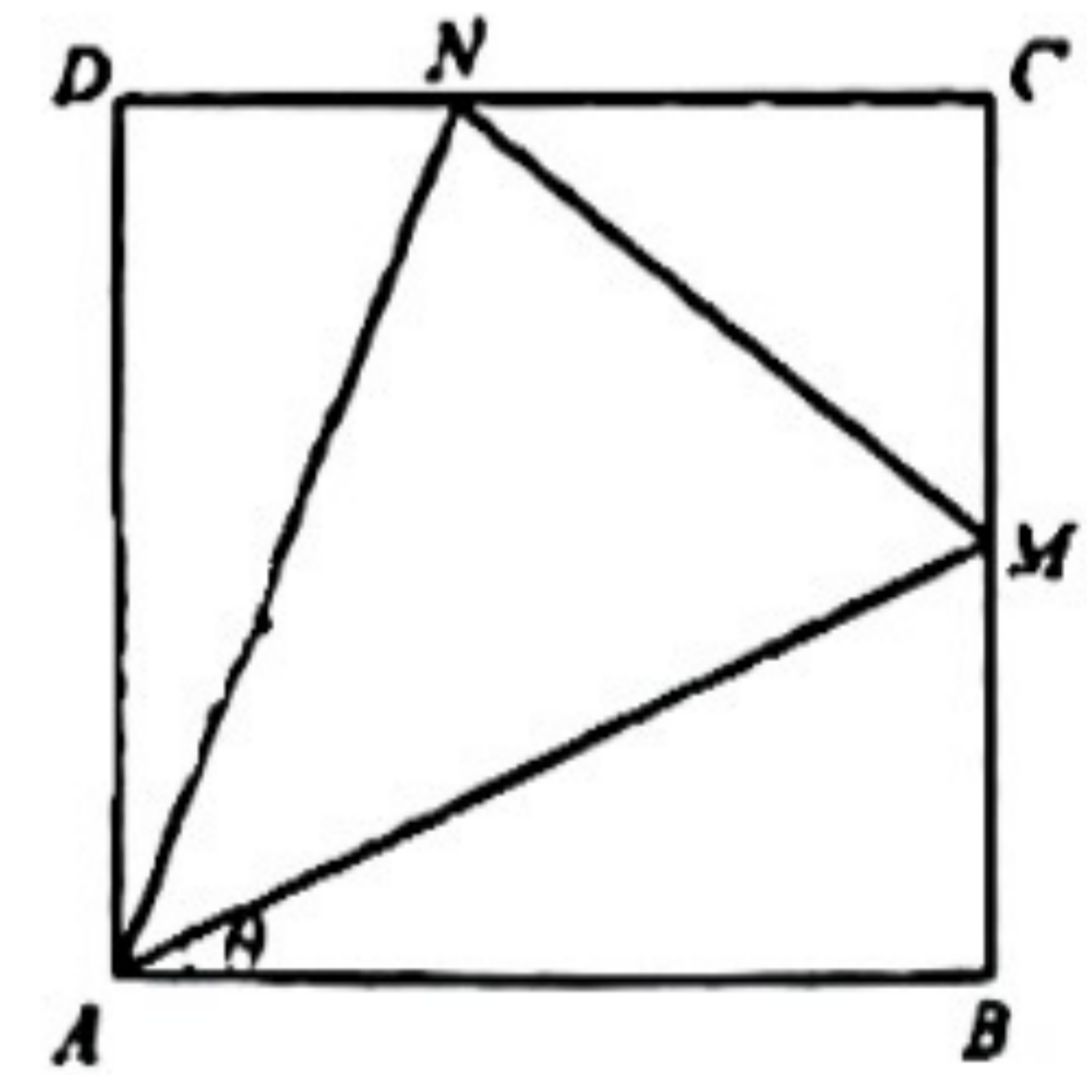
11. 如图，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中， M, N 分别为边 BC, CD 上的两个动点，且 $BM + DN = MN$ 。记 $\angle MAB = \theta$ ， $\tan \theta = t$ ，下列说法正确的有 ()

A. $\angle MAN$ 为定值 $\frac{\pi}{4}$

B. $MN = \frac{2-2t^2}{1+t}$

C. $AN = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$

D. $\overline{AM} \cdot \overline{AN}$ 的最小值为 $8\sqrt{2} - 8$



三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$ ， $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{5}$ ，则 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 的值为_____。

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 3)$ ， $\vec{b} = (\sin 20^\circ, \cos 20^\circ)$ ，则向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角等于_____。

14. 已知 $\triangle ABC$ 内接于一个半径为2的圆，其中 O 为圆心， G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\vec{OG} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC})$ 的取值范围为_____。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (本小题 13 分)

已知 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, 其中 $0 < \beta < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

(1) 求 $\sin\alpha$ 的值;

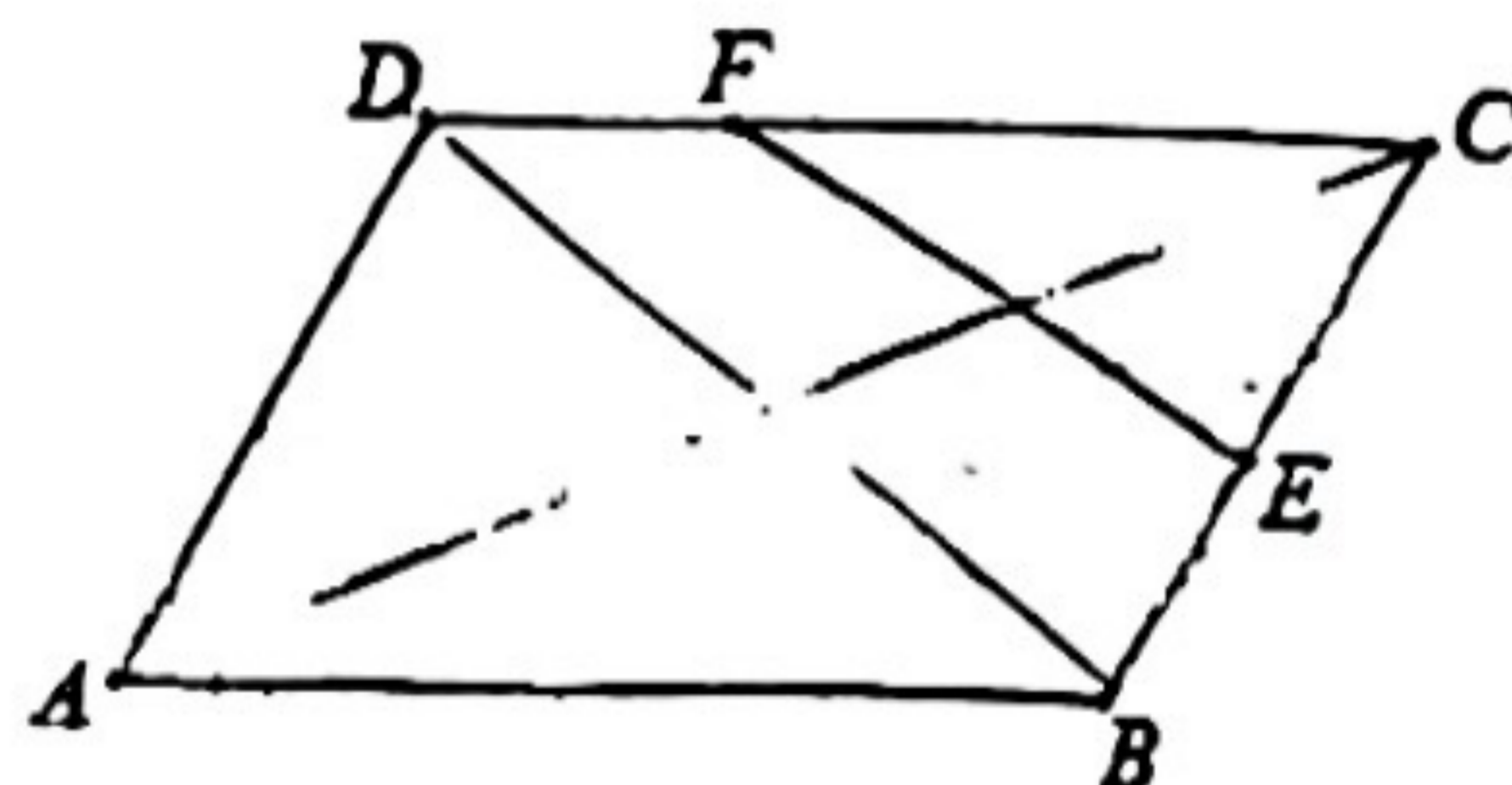
(2) 求 $\cos(\beta + \frac{\pi}{4})$ 的值.

16. (本小题 15 分)

如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\angle BAD = 60^\circ$, $|\overline{AB}| = 3$, $|\overline{AD}| = 2$, $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{CF} = \frac{2}{3}\overline{CD}$.

(1) 若 $\overline{EF} = m\overline{AB} + n\overline{AD}$, 求 m, n 的值和向量 \overline{EF} 的模长;

(2) 求 \overline{EF} 和 \overline{BD} 夹角的余弦值.



17. (本小题 15 分)

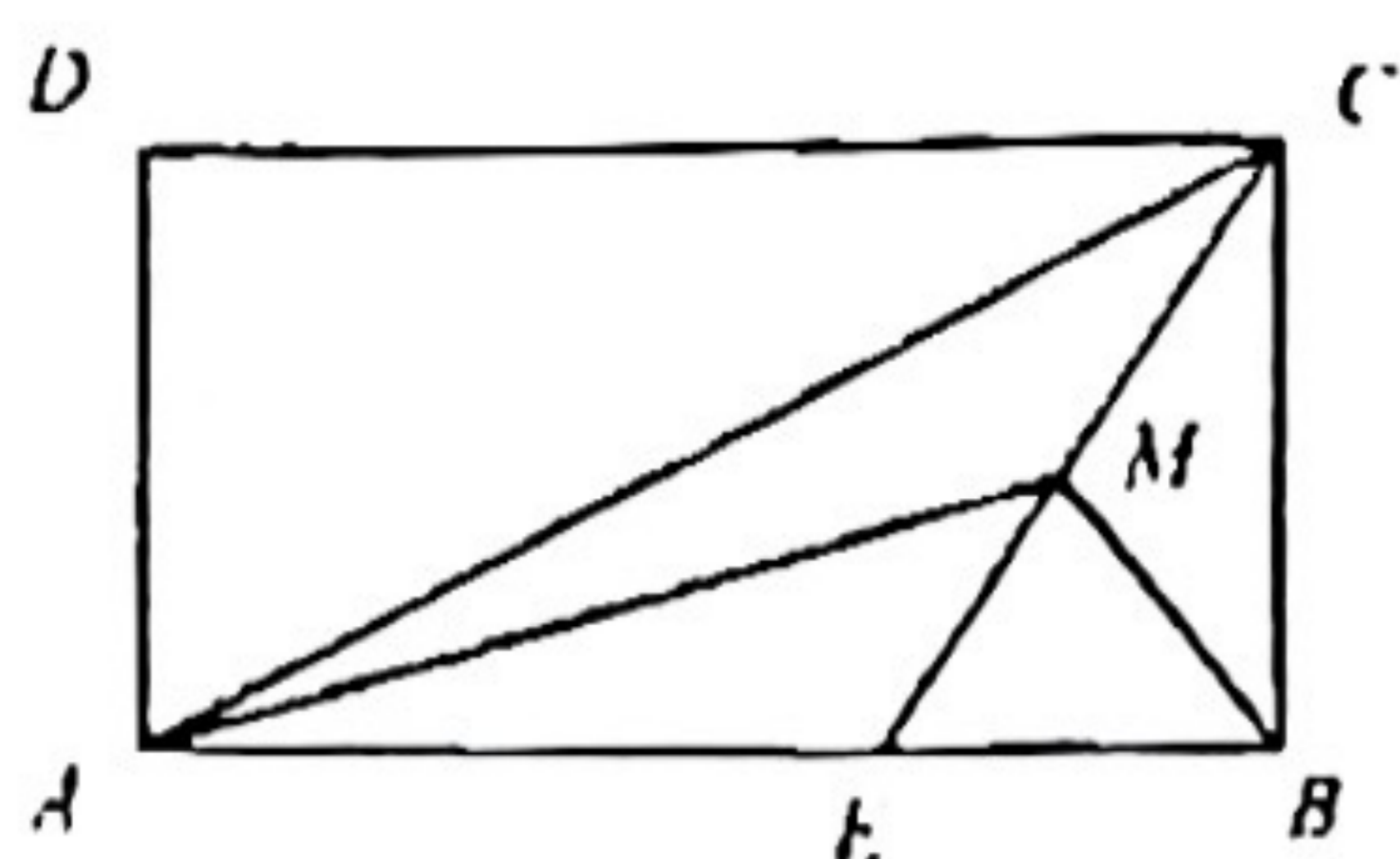
已知向量 $\vec{a} = (\cos\alpha + \sqrt{3}\cos\beta, \sin\alpha)$, $\vec{b} = (\cos\alpha, \sin\alpha - \sqrt{3}\sin\beta)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$.

(1) 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值;

(2) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 且 $\tan\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$, 求 $2\alpha + \beta$ 的值.

18. (本小题 17 分)

如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上, 且 $\overline{AE} = 2\overline{EB}$, M 是线段 CE 上一动点.



- (1) $\overline{ME} = m\overline{MA} + n\overline{MB}$, $m, n \in \mathbb{R}$, 求 $m \cdot n$ 的值;
 (2) 若 $AB = 9$, $\overline{CA} \cdot \overline{CE} = 43$, 求 $(\overline{MA} + 2\overline{MB}) \cdot \overline{MC}$ 的最小值.

19. (本小题 17 分)

已知平面直角坐标系中, 点 $A(a, 0)$, 点 $B(0, b)$ (其中 a, b 为常数, 且 $ab \neq 0$), 点 O 为坐标原点.

- (1) 设点 P 为线段 AB 上靠近 A 的三等分点, $\overline{OP} = \lambda\overline{OA} + (1-\lambda)\overline{OB}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 求 λ 的值;
 (2) 如图所示, 设点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ 是线段 AB 的 n 等分点, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,
 ① 当 $n=2024$ 时, 求 $|\overline{OA} + \overline{OP}_1 + \overline{OP}_2 + \dots + \overline{OP}_{n-1} + \overline{OB}|$ 的值 (用含 a, b 的式子表示);
 ② 当 $a=b-1$, $n=10$ 时, 求 $\overline{OP}_j \cdot (\overline{OP}_i + \overline{OP}_j)$ ($1 \leq i, j \leq n-1, i, j \in \mathbb{N}^*$) 的最小值.

(说明: 可能用到的计算公式: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

